

Grado en Biotecnología
Análisis Matemático - Evaluación Única Final

1. Discutir y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema, según los valores de los parámetros a y b .

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$$

2. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\ln \frac{x^2 - 8x + 4}{x^2 - 3x + 2}}$.
3. Calcula las soluciones de la ecuación $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ y exprésalas en la forma $a + ib$.
4. La evolución de una población de ranas está descrita por la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = Ax_n(2 - x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

donde A es un parámetro positivo.

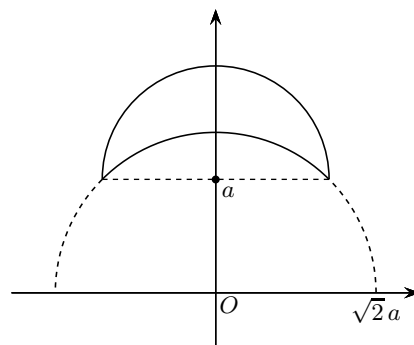
- a) ¿Para qué valores de $A > 0$ el modelo tiene sentido biológico?
- b) Calcula los puntos de equilibrio del modelo y estudia su estabilidad.
5. La dinámica de una población estructurada en dos grupos de edad, “jóvenes” y “adultos”, está dada por $X(n+1) = MX(n)$ donde M es la matriz de Leslie:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Interpreta biológicamente cada elemento de la matriz de Leslie.
- b) Calcula el autovalor dominante y un autovector asociado.
- c) Discute el comportamiento en el futuro de la población y calcula las proporciones a largo plazo de los grupos de edad.
6. Se necesita encargar la fabricación de unas cajas de cartón para transportar plantas que deben tener la forma de un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero. Sabiendo que el volumen de cada caja debe ser de 6 litros, se pide calcular las dimensiones de las cajas para minimizar la cantidad de cartón necesario para la fabricación, esto es, minimizar el área total de la superficie de la caja, incluyendo las dos tapas.

7.

Sea $a > 0$. Calcula usando técnicas de integración el área de la luna formada por la parte del círculo $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ que es exterior al círculo $x^2 + y^2 = 2a^2$. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar dicha luna alrededor del eje de abscisas.



8. Clasifica los puntos críticos para determinar los extremos relativos del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ por:

$$f(x, y) = 2xy - 2x^3y - xy^2 + x^3y^2$$